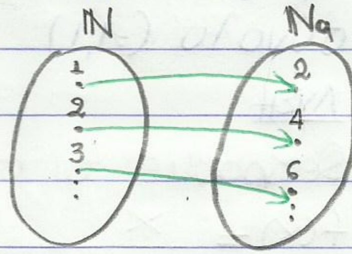
ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ -

1) $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_a$, $\mathbb{N}_a$: σύνολο αρτίων φυσικών

ΛΥΣΗ



$\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_a \Leftrightarrow \exists f_{1-1} : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} \mathbb{N}_a$

Βλέπουμε, ότι προφανώς:

$f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{N}$ η οποία θα πρέπει να είναι 1-1 και επί του συνόλου $\mathbb{N}_a$.

Έστω τυχόντα $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ (1-1)

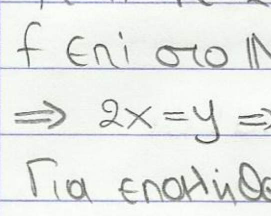
f επί στο $\mathbb{N}_a \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{N}_a)(\exists x \in \mathbb{N}) : f(x) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2}$.

Για επαλήθευση: $f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\frac{y}{2} = y$ (επί)

2) Να δειχθεί ότι το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών ($\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \simeq \mathbb{N}$)

ΛΥΣΗ



$\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}^- \Leftrightarrow \exists f_{1-1} : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} \mathbb{Z}^-$

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 1 \\ -(x-1) & , x \in \{2,3,4,\ldots\} \end{cases}$$

Όπου, παρατηρούμε ότι είναι 1-1 και επί

Άλλη, ισοδύναμη συνάρτηση της f είναι: $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{N}$

3) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έχει ίδια ισχύ με το σύνολο $(-1,1)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τύπου

$f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ όπου για καθε $x\in\mathbb{R}$:

$$-|x|\le x\le |x| \Rightarrow -1-|x|<x<1+|x| \Rightarrow -1<\frac{x}{1+|x|}<1$$

Επομένως, $B(f)\subseteq(-1,1)$

Έτσι, θα πρέπει νδο $f \underset{1-1}{:} \mathbb{R}\xrightarrow{\text{επι}}(-1,1)$

• Για τυχόντα x,y εν $\mathbb{R}$

$f(x)=f(y) \Rightarrow \dfrac{x}{1+|x|}=\dfrac{y}{1+|y|}$ όπως οι

παρονομαστές θετικοί θα πρέπει x,y ομόσημοι

α. $x,y\ge 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x}=\dfrac{y}{1+y} \Rightarrow x=y$

β. $x,y<0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-x}=\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow x=y$

Αμφιμονοσήμαντη

• Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$

$x<0 \Rightarrow -1<f(x)<0$

$x>0 \Rightarrow 0<f(x)<1$

Έτσι, για τυχόν $z\in(-1,1)$:

i. $-1<z<0$, $\exists x\in R : f(x)=\lambda \ (x<0) \Rightarrow x=\dfrac{1}{1+\lambda}<0$

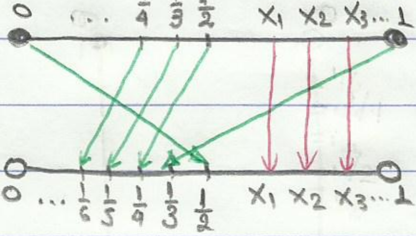
ii. $0<z<1$, $\exists x\in R : f(x)=\lambda \ (x>0) \Rightarrow x=\dfrac{1}{1-\lambda}>0$

επί του $(-1,1)$

4) Να δείξετε ότι τα σύνολα:
$[0,1] \simeq (0,1)$ και $(0,1] \simeq (0,1)$

ΛΥΣΗ

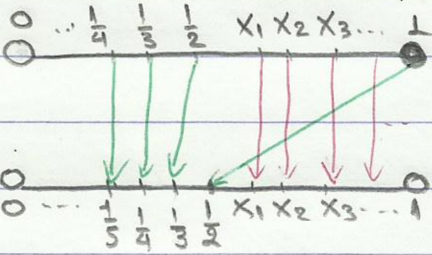
Επιλέγουμε συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,1)$ με τύπο:



$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in A \\ 1/\nu+2, & x=\frac{1}{\nu}, \nu\in\mathbb{N} \\ 1/2, & x=0 \end{cases}$$

η οποία προφανώς είναι 1-1 και επί του συνόλου $(0,1)$.

Επιλέγουμε τη συνάρτηση $f:(0,1]\to(0,1)$ τύπου:

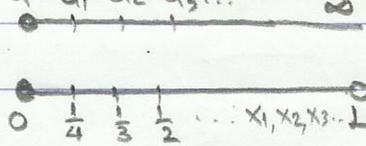


$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in A \\ 1/\nu+1, & x=\frac{1}{\nu}, \nu\in\mathbb{N} \end{cases}$$ 1-1 και επί

5) Να δείξετε ότι $[a,+\infty) \simeq [0,1)$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x)=\dfrac{x-a}{1+x-a}$ ώστε $f:[a,+\infty)\to[0,1)$



$x\geq a \Rightarrow x-a\geq 0 \Rightarrow 1+x-a\geq 1$

άρα η $f(x)\geq 0$ και αφού $1+x-a > x-a$ τότε θα πηγαίνει στο $[0,1)$. 1-1 και επί

• ΝΔΟ $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

Αρκεί νδο $\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N} \gtrsim \mathbb{N}}_{①}$ και $\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N} \lesssim \mathbb{N}}_{②}$

① ⇝ Επιλέγουμε συνάρτηση $f_{1-1}: \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (όπως λέει ο ορισμός)

Επιλέγουμε ως $f(x)=(x,1)$

με $f(x)=f(y) \Rightarrow (x,1)=(y,1) \Rightarrow x=y$ "1-1"

ή Επιλέγουμε ως $f(x)=(x,x+1)$

με $f(x)=f(y) \Rightarrow (x,x+1)=(y,y+1) \Rightarrow x=y$ "1-1"

② ⇝ Επιλέγουμε $g_{1-1}: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ όπου:

$$g(x,y)=2^{x}\cdot(2y+1)$$

με $g(x,y)=g(z,w) \Rightarrow 2^{x}(2y+1)=2^{z}(2w+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{x-z}\cdot(2y+1)=(2w+1)$ ⊛

αν $x>z$ έχουμε ότι η ⊛: $\underbrace{2\cdot(\text{περιττος})}_{\text{αρτιος}} = \text{περιττος}$

αρτιος = περιττος **Ατοπο**

αν $x<z$ έχουμε ότι η ⊛: 2^{x-z} θα είναι παρονομαστής άρα πάλι ατοπο

αν $x=z \Rightarrow y=w$ άρα η g "1-1".